Л 6. Линии и поверхности второго порядка. Исследование уравнения второго порядка. Эллипс. Гипербола. Парабола

Цель лекции: познакомить студентов с основными типами линий и поверхностей второго порядка, геометрическими определениями эллипса, гиперболы и параболы, их каноническими уравнениями и основными характеристиками. Сформировать представление о поверхностях второго порядка в пространстве и их классификации.

Основные вопросы

- Линии второго порядка на плоскости:
- Канонические уравнения линий второго порядка.
- Фокусные свойства, директрисы, эксцентриситет.
- Асимптоты гиперболы.
- Общее уравнение кривой второго порядка.
- Цилиндрические поверхности второго порядка.
- Конические поверхности.
- Поверхности второго порядка:
- Канонические уравнения поверхностей.

Краткое содержание: лекция посвящена изучению основных кривых второго порядка — эллипса, гиперболы и параболы, их геометрическим определениям, фокусным свойствам и каноническим уравнениям. Рассматриваются также цилиндрические и конические поверхности второго порядка, эллипсоиды, гиперболоиды и параболоиды. Вводится понятие общего уравнения второго порядка и даётся классификация поверхностей по каноническим формам.

Рассмотрим в начале частные виды кривых, определяемых на плоскости уравнениями, в которых неизвестные x и y присутствуют только в первой или во второй степени.

1. Пусть на плоскости Oxy имеются две точки F_1 и F_2, называемые фокусами на расстоянии $2c$ друг от друга ($2c-$ фокусное расстояние). Для определенности расположим их на оси Ox симметрично относительно начало координат, т.е. $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$. Пусть $2a > 2c$.

Определение. Эллипсом называется геометрическое место точек M плоскости, сумма расстояний, от которых до двух выбранных фокусов, постоянна и равна $2a$.

Разделив части уравнения на a^2b^2, получим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \text{ где } b=\sqrt{a^2-c^2}.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением эллипса, а числа a и b его полуосями (большой и малой). Подставив в каноническое уравнение значение $y=0$, получим $\frac{x^2}{a^2}=1$; $x^2=a^2$, $x=\pm a$, т.е. эллипс пересекает ось Ox в точках с координатами $x = \pm a$. Аналогично проверяется, что ось Oy эллипс пересекает в точках $y = \pm b$. Эти точки пересечения эллипса с осями координат называются вершинами эллипса.

Несложно проверить, что т. O является центром симметрии эллипса, описываемого каноническим уравнением, а оси Ox и Oy его осями симметрии. Ось, проходящая через фокусы эллипса (ось Ox), называется его фокальной осью. Число $e = \frac{c}{a}$ называется эксцентриситетом. У эллипса $0 \le e < 1$. Прямые, проходящие перпендикулярно фокальной оси на расстоянии $d = \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c}$ от центра эллипса, называются директрисами эллипса.

2. В частном случае, когда фокусное расстояние эллипса $2c = 0$, два фокуса эллипса совпадают с его центром. При этом $a = b$ и каноническое управление эллипса принимает вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

Это уравнение называется каноническим уравнением окружности радиуса a. У окружности эксцентриситет $e = 0$, а директрисы отсутствуют.

Уравнение окружности радиуса а с центром в точке $O'(x_0, y_0)$ имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = a^2.$$

Пример. Запишем уравнение окружности с центром в точке $M_0(3,4)$, проходящей через начало координат. Поскольку радиус окружности $a = |OM_0| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$, то уравнение этой окружности имеет вид $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Гипербола. Пусть на плоскости имеются два фокуса (например $F_1(-c,0)$ и $F_2(c,0)$ и пусть $a < c$.

Определение. Гиперболой называется геометрическое место точек M плоскости, разность расстояний от которых до двух выбранных фокусов постоянна и равна $\pm 2a$. И каноническим уравнением гиперболы записывается так:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{где } b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Число а называется действительной полуосью гиперболы, а число b – ее мнимой полуосью.

Подставив в каноническое уравнение $y = 0$, получим $x^2 = a^2$, т.е. $x = \pm a$, следовательно, гипербола пересекает ось Ox в точках $(a,0)$ и $(-a,0)$. Эти точки называются вершинами гиперболы. Подставив в каноническое уравнение $x = 0$, получим $-\frac{y^2}{b^2} = 1$. Это уравнений решения не имеет, поэтому гипербола с каноническим уравнением с осью Oy не пересекается. Как и у эллипса, т. O является центром симметрии гиперболы, а оси Ox и Oy ее осями симметрии.

Определения эксцентриситета и директрис гиперболы повторяют соответствующие определения для эллипса. Эксцентриситет гиперболы $e > 1$.

Определение. Прямая L называется асимптотой кривой K, если расстояние от точки на кривой до этой прямой стремится к нулю при удалении точки вдоль кривой в бесконечность.

Это определение не вполне корректно. Точное определение асимптоты опирается на понятие предела, которое будет изучаться позже. В четвертом модуле будет приведено доказательство следующего факта. Прямые $y = \pm \frac{b}{a} x$ являются асимптотами обеих ветвей гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Парабола. Пусть на плоскости имеется прямая D (директриса) и точка F (фокус) на расстоянии p от директрисы. Пусть D имеет уравнение $x = -\frac{p}{2}$, фокус - координаты $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Определение. Параболой называется геометрическое место точек M плоскости, расстояние от которых до фокуса совпадает с расстоянием до директрисы (см. рис. 2.19).

Пусть N - проекция точки $M(x,y)$ на директрису D. Из условия $|MN| = |MF|$ выведем уравнение параболы: $x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}$; $x^2 + px + \frac{p^2}{2} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$; $y^2 = 2px$.

Это уравнение называется каноническим уравнением параболы, а число $p > 0$ ее параметром. Парабола проходит через точкой O, которая называется ее вершиной. Ось Ox является осью симметрии параболы. Эксцентриситет e параболы всегда считается равным единице. Асимптот у параболы нет.

Теорема. Пусть на плоскости заданы прямая D (директриса) и точка F (фокус), не лежащая на D. Пусть задано число $e > 0$ (эксцентриситет). Тогда геометрическое место точек M плоскости таких, что отношение расстояние от M до F к расстоянию от M до D равно e, является:

а) эллипсом, при $e < 1$; в) гиперболой, при $e > 1$; с) параболой, при $e = 1$.

Общее уравнение кривой второго порядка

Определение. Кривой второго порядка называется множество точек плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + b_1x + b_2y + c = 0.$$

Здесь хотя бы одно из чисел a_{11}, a_{12}, a_{22} отлично от нуля. Это уравнение называется общим уравнением кривой второго порядка.

Поверхности второго порядка. Рассмотрим вначале частные виды поверхностей, определяемых в пространстве уравнениями, в которых неизвестные x, y, z присутствуют только в первой или во второй степени.

1. Пусть в пространстве имеется кривая K и прямая L.

Определение. Цилиндрической поверхностью (цилиндром) с направляющей K и образующей L называется геометрическое место точек пространства, лежащих на прямых, проходящих через точки K параллельно L.

1.1. Эллиптический цилиндр имеет направляющей эллипс и каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. В частности, круговой цилиндр: $x^2+y^2=a^2$ имеет направляющей окружность.

1.2. Гиперболический цилиндр имеет направляющей гиперболу и каноническое уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1.3. Параболический цилиндр имеет направляющей параболу и каноническое уравнение $y^2=2px$.

1.4. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ определяет ось Oz.

1.5. Уравнения $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ и $x^2=-1$ - пустое множество.

1.6. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ - пара пересекающихся по оси Oz плоскостей

1.7. $x^2=a^2$ - пара плоскостей, параллельных Oyz.

1.8. $x^2=0$ - плоскость Oyz.

Все перечисленные поверхности называются цилиндрическими поверхностями второго порядка.

1. Пусть в пространстве имеется кривая K и точка O, не лежащая на K.

Определение. Конической поверхностью (конусом) с направляющей K и вершиной O называется геометрическое место точек пространства, лежащих на прямых, проходящих через O и пересекающих K.

В частности, конические поверхности, рассматриваемые в школьной программе, имели направляющие окружности K, их вершины находились на прямой, проходящей через центр K перпендикулярно плоскости окружности.

Заметим, что вершина O любой конической поверхности является ее центром симметрии.

Уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \quad (a,b,c>0)$ называется каноническим уравнением конуса второго порядка.

1. Поверхность, определяемая каноническими уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \ (a,b,c>0)$$

называется эллипсоидом, а числа a,b,c – его полуосями.

2. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$, $(a,b,c>0)$
называется двуполостным гиперболоидом.

3. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a,b,c>0)$
называется однополостным гиперболоидом.

4. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z$, $(p,q>0)$ называется эллиптическим параболоидом.

5. Поверхность, определяемая каноническим уравнением $\frac{x^2}{2p}-\frac{y^2}{2q}=z$, $(p,q>0)$ называется гиперболическим параболоидом.

6. Определение. Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют уравнению

$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+b_1x+b_2y+b_3z+c=0.$$

Здесь хотя бы один коэффициент $a_{i,j}$ должен быть отличен от нуля.

Теорема. Любая поверхность второго порядка в пространстве является одной из следующих поверхностей:

1) одной из цилиндрических поверхностей второго порядка;
2) конусом второго порядка;
3) Эллисоидом;
4) одно или двуполостным гиперболоидом;
5) эллиптическим или гиперболическим параболоидом.

Найдется, такая декартова система координат $O'x'y'z'$, в которой уравнение поверхности принимает канонический вид.

Вопросы для самоконтроля

1. Дайте геометрическое определение эллипса.
2. Какие точки называются фокусами эллипса?
3. Запишите каноническое уравнение эллипса и объясните значение параметров a и b.
4. Что называется эксцентриситетом эллипса и гиперболы?
5. Определите гиперболу через разность расстояний до фокусов.
6. Что называют асимптотами гиперболы?
7. Как выводится каноническое уравнение параболы?
8. Что является параметром параболы?
9. Запишите общее уравнение кривой второго порядка.
10. Дайте определение цилиндрической поверхности второго порядка.
11. Запишите каноническое уравнение эллипсоида.
12. Чем различаются одно- и двуполостной гиперболоиды?
13. Что называют эллиптическим параболоидом и гиперболическим параболоидом?

14. Как классифицируются поверхности второго порядка на основе их канонического вида?

Литература

1. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — СПб.: Лань, 2009.
2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. — М.: ФМЛ, 2004.
3. Индивидуальные задания по высшей математике / под ред. А.П. Рябушко. — Минск: Выш. школа, 2009.
4. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике, 2009.